SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. VENNI

SEPARAZIONE DELLO SPETTRO DI UN OPERATORE LINEARE

14 GENNAIO 1988

1. IL PROBLEMA DELLA SEPARAZIONE DELLO SPETTRO

Questo seminario ha per oggetto alcuni risultati ottenuti in [DV] riguardanti un problema di teoria degli operatori.

Sia $X \neq \{0\}$ uno spazio di Banach complesso. $A:\mathscr{D}(A) \to X$ un operatore lineare chiuso (con $\mathscr{D}(A)$ sottospazio vettoriale di X) e supponiamo che $\sigma(A) = \sigma_+ \cup \sigma_-$, dove σ_+ e σ_- sono sottoinsiemi chiusi di C e $\sigma_+ \cap \sigma_- = \emptyset$. Il problema è quello di decomporre X nella somma diretta di due sottospazi chiusi X_+ e X_-, invarianti per A (nel senso che $x \in X_\pm \cap \mathscr{D}(A) \Rightarrow Ax \in X_\pm$) e tali che, chiamando A_+ e A_- gli operatori "ridotti" (precisamente $\mathscr{D}(A_\pm) = X_\pm \cap \mathscr{D}(A)$, $A_\pm x = Ax \ \forall x \in \mathscr{D}(A_\pm)$), si abbia che $\sigma(A_+) = \sigma_+$, $\sigma(A_-) = \sigma_-$.

Supponendo ulteriormente che $\rho(A)$ non sia limitato e sapendo che $\|(\lambda-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} = O(\phi(\lambda))$ per $|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \in \rho(A)$ (essendo ϕ un'assegnata funzione) si può richiedere in più che sia

$\|(\lambda-A_\pm)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X_\pm)} = O(\phi(\lambda))$ per $|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \in \rho(A_\pm)$ (osserviamo a questo proposito che $\rho(A_+) = \rho(A) \cup \sigma_-$, $\rho(A_-) = \rho(A) \cup \sigma_+$ e che per $\lambda \in \rho(A)$ è $(\lambda-A_\pm)^{-1} = (\lambda-A)^{-1}|X_\pm$).

Oltre al lavoro di Grisvard [G], citato in bibliografia, il solo risultato a noi noto su questo problema si riferisce al caso in cui almeno uno dei due chiusi è limitato. Se, p. es., σ_+ è compatto, allora una coppia di spazi (X_+,X_-) che separa lo spettro di A è costituita dal codominio e dal nucleo del proiettore

$$(1.1) \qquad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda-A)^{-1} d\lambda$$

dove γ è l'unione di un numero finito di curve chiuse rettificabili orientate, a due a due disgiunte, contenute in $\rho(A)$ e tali che $\forall z \in \sigma_+$ (risp. $\forall z \in \sigma_-$) la somma degl'indici di z rispetto a tali curve sia $= 1$ (risp. $= 0$). In questo caso si sa (cfr. p. es. [K], th. III.6.17) che $X_+ \subseteq \mathscr{D}(A)$, cosicchè $A_+ \in \mathscr{L}(X_+)$.

Questo, fra l'altro, assicura che $\|(\lambda-A_+)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1})$ per $|\lambda|\to+\infty$ cosicchè il comportamento all'infinito di $(\lambda-A_+)^{-1}$ non è certamente peggiore di quello di $(\lambda-A)^{-1}$, essendo noto che

(1.2) $$\liminf_{|\lambda|\to\infty,\lambda\in\rho(A)} \|\lambda(\lambda-A)^{-1}\| \geq 1$$

(su $(\lambda-A_-)^{-1}$ non c'è nulla da dire, poichè σ_+ è limitato).

La stessa stima dal basso (1.2) dice anche che quando σ_+ e σ_- non sono limitati, non è possibile definire Q mediante la formula (1.1) se γ è una curva che separa σ_+ da σ_-, perchè in tal caso γ sarà una curva non limitata e $\|(\lambda-A)^{-1}\| \geq \frac{1-\varepsilon}{|\lambda|}$ per $|\lambda|$ abbastanza grande.

2. I RISULTATI DI GRISVARD

Come in [G] faremo la seguente ipotesi fondamentale

(2.1) $\mathscr{D}(A)$ è denso in X, $R\subseteq\rho(A)$ ed $\exists M\in R^+$ tale che
$$\forall\lambda\in R \ \|(\lambda-A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}.$$

(in realtà in [G] è $iR\subseteq\rho(A)$, ma è ovvio che non cambia nulla). Sarà allora $\sigma_+ = \{\lambda\in\sigma(A)\ ;\ \mathrm{Im}\lambda>0\}$, $\sigma_- = \{\lambda\in\sigma(A);\ \mathrm{Im}\lambda<0\}$. E' poi ovvio che esistono $r\in R^+$, $M_1\in R^+$ tali che $\{\lambda\in C;\ -r\leq \mathrm{Im}\lambda\leq r\}\subseteq\rho(A)$ e $\forall\lambda\in\sigma$ con $-r\leq\mathrm{Im}\lambda\leq r$, $\|(\lambda-A)^{-1}\| \leq \frac{M_1}{1+|\lambda|}$.

Diremo che una coppia di sottospazi chiusi (X_+,X_-) di X separa lo spettro di A se

(2.2) $X = X_+\oplus X_-$

(2.3) X_+ e X_- sono invarianti per A (nel senso precisato nel § 1) e $\sigma(A_{\pm}) = \sigma_{\pm}$ (A_+ e A_- essendo gli operatori ridotti, come nel § 1)

(2.4) $\|(\lambda-A_{\pm})^{-1}\|_{\mathscr{L}(X_{\pm})} = O(|\lambda|^{-1})$ per $|\lambda|\to+\infty$, $\lambda\in\rho(A_{\pm})$

Sotto l'ipotesi (2.1) Grisvard ha dimostrato che:

(2.5) se X è uno spazio di Hilbert ed $\exists\theta\in]0,1[$ tale che $(X,\mathscr{D}(A))_{\theta,2} = (x,\mathscr{D}(A^*))_{\theta,2}$ (spazi d'interpolazione reali), allora esiste una coppia di sottospazi chiusi che separa lo spettro di A

(2.6) quando X è uno spazio di Banach, è possibile separare lo spettro di A in $(X,\mathscr{D}(A))_{\theta,p}$ $(0<\theta<1,\ 1\leq p\leq\infty)$

Il procedimento di Grisvard consiste nel considerare l'operatore
$\tilde{P}_+:\mathscr{D}(A)\to X$, $\tilde{P}_+x = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t+is}(t+is - A)^{-1}Axdt$,
dove $s\in]0,r]$. La convergenza dell'integrale e la sua indipendenza da s seguono facilmente dall'ipotesi 2.1. Accanto a $\tilde{P}_+$ possiamo considerare

$$\tilde{P}_-:\mathscr{D}(A)\to x,\quad \tilde{P}_-x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-is}(t-is-A)^{-1}Axdt.$$

Si prova allora che:

Lemma 2.7. *Gli operatori* $\tilde{P}_+$ e $\tilde{P}_-$ *sono limitati da* $\mathscr{D}(A)$ *in* X *(quando* $\mathscr{D}(A)$ *ha la norma del grafico). Inoltre:*

(a) $\forall x\in\mathscr{D}(A)$ $\tilde{P}_+x + \tilde{P}_-x = x$

(b) $\forall x\in\mathscr{D}(A^2)$ $\tilde{P}_{\pm}x\in\mathscr{D}(A)$ e $A\tilde{P}_{\pm}x = \tilde{P}_{\pm}Ax$

(c) $\forall x\in\mathscr{D}(A^2)$ $\tilde{P}^2_{\pm}x = \tilde{P}_{\pm}x$

La dimostrazione richiede semplici applicazioni di ben note proprietà delle funzioni olomorfe, degli operatori chiusi e dell'equazione risolvente. IL teorema seguente si trova, implicitamente, in [G]:

Teorema 2.8. *Supponiamo che gli operatori* $\tilde{P}_+$ e $\tilde{P}_-$ *ammettano prolungamenti* P_+ e P_-, *continui da* X a X. *Allora* $(P_+(X), P_-(X))$ *separa lo spettro di* A.

Poichè $\mathscr{D}(A^2)$ è ancora denso in X, dal lemma 2.7 segue subito che se P_+ e P_- esistono, essi sono proiettori tali che P_+ e $P_- = I$ e i loro codomini sono invarianti per A. Il fatto che $\sigma(A_\pm) = \sigma_\pm$ si prova in modo analogo al caso in cui σ_+ sia limitato (v. [K]). La stima sul risolvente si ottiene provando che per $|\lambda|\to+\infty$ $\|\lambda(\lambda-A_\pm)^{-1}\| = O(\log|\lambda|)$ e applicando il teorema di Phragmên-Lindelöf.

3. I RISULTATI DI ESISTENZA E UNICITA'

I risultati del § 2 lasciano aperti alcuni interrogativi. Che succede se gli operatori P_+ e P_- non hanno prolungamento limitato a X? E se invece tale prolungamento esiste (ciò accade per entrambi gli operatori o per nessuno dei due, come è evidente da 2.7(a)), ci sono altre coppie di sottospazi che separano lo spettro di A?

Cominciamo con un risultato decisivo di unicità.

Teorema 3.1. *Siano* (X_{1+},X_{1-}),(X_{2+},X_{2-}) *coppie di sottospazi chiusi di* X *che separano lo spettro di* A *(nel senso di (2.2)-(2.4)). Allora* $(X_{1+},X_{1-}) = (X_{2+},X_{2-})$.

Dimostrazione. Se $X_+ = X_{1+}+X_{2-}$, da $X_+\cap X_{1-} = \{0\}$ segue subito $X_{2+}\subseteq X_{1+}$. Una volta provato questo, si avrà $X_{1+} = X_{2+}$ per simmetria e $X_{1-}=X_{2-}$ per analogia.

Se $x\in X_+\cap X_{1-}$ si prova (v. i dettagli in [DV]) che è possibile definire su C una funzione intera $\lambda\to T_\lambda x$, ponendo $T_\lambda x=$

$$\begin{cases} (\lambda-A_{1+})^{-1}x_1 + (\lambda-A_{2+})^{-1}x_2 & \text{se} \quad \mathrm{Im}\lambda < r,\ x_j\in X_{j+} \ \text{e} \ x_1+x_2 = x \\ (\lambda-A_1)^{-1}x & \text{se} \quad \mathrm{Im}\lambda > -r \end{cases}$$

Poichè $\sup_{\lambda\in C}\|\lambda T_\lambda x\|<+\infty$, dal teorema di Liouville segue da $T_\lambda x=0$ $\forall\lambda$ e quindi $x=0$.

I risultati riguardanti l'esistenza si esprimono mediante proprietà delle potenze degli operatori A e -A. A causa dell'ipotesi (2.1), tali potenze sono definite per ogni esponente $z\in C$. Ricordiamo che (essendo $\overline{\mathscr{D}(A)}=X$ e $0\in\rho(A)$) si ha:

- A^z è un operatore lineare chiuso con dominio denso $\forall z\in C$
- $A^z\in\mathscr{L}(X)$ quando $\mathrm{Re}z<0$
- se $\mathrm{Re}z>0$, allora $A^z\in\mathscr{L}(X)\Leftrightarrow A\in\mathscr{L}(X)$
- esistono operatori per i quali $A^{is}\notin\mathscr{L}(x)$ $\forall s\in R\setminus\{0\}$ e altri operatori per i quali $A^{is}\in\mathscr{L}(x)$ $\forall s\in R$.

Ci interessa sapere se, per $\mathrm{Re}z>0$, c'è qualche relazione tra $\mathscr{D}(A^z)$ e $\mathscr{D}((-A)^z)$. Se $z\in N$, questo è ovvio: $(-A)^z=(-1)^zA^z$, perciò i due domini sono uguali. Ma se $z\notin N$, questo è molto meno ovvio. Ricordiamo che $\mathscr{D}(A^z)$ e $\mathscr{D}((-A)^z)$ sono i codomini di A^{-z} e di $(-A)^{-z}$ rispettivamente e che se, per esempio, $0<\mathrm{Re}z<1$, allora $A^{-z}=\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\int_0^\infty\lambda^{-z}(\lambda+A)^{-1}dz$ e analogamente $(-A)^{-z}=\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\int_0^\infty\lambda^{-z}(\lambda-A)^{-1}dz$.

Ora si può vedere che se $\sigma_+=\emptyset$ e $\|(\lambda-A)^{-1}\|=O(|\lambda|^{-1})$ per $|\lambda|\to+\infty$ con $\mathrm{Im}\lambda>0$, oppure $\sigma_-=\emptyset$ e $\|(\lambda-A)^{-1}\|=O(|\lambda|^{-1})$ per $|\lambda|\to+\infty$ con $\mathrm{Im}\lambda<0$, allora integrando su opportuni circuiti contenuti nel corrispondente semipiano, si ottiene $A^{-z}=e^{\pm i\pi z}(-A)^{-z}$ (nell'esponente va preso il segno + se $\sigma_+=\emptyset$, il segno - se $\sigma_-=\emptyset$), e quindi $\mathscr{D}(A^z)=\mathscr{D}((-A)^z)$, $\forall z\in C$ con $\mathrm{Re}z>0$.

Il problema della relazione tra $\mathscr{D}(A^z)$ e $\mathscr{D}((-A)^z)$ rimane aperto nel caso generale, anche se, almeno in senso negativo riceve una certa luce dai risultati che seguono. Per quanto riguarda il motivo per cui siamo interessati a tale problema, esso comincia a vedersi con il seguente lemma

Lemma 3.2 $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ *e per* Re$z \geq 0$ *si ha*

$$A^z(-A)^z x = e^{i\pi z}\tilde{P}_+ x + e^{-i\pi z}\tilde{P}_- x$$

Cenno di dimostrazione

(a) Se la formula vale per $0<\mathrm{Re}z<1$, essa vale anche per Re$z = 0$. Infatti, essendo $x \in \mathcal{D}(A)$ si ha (v. [T] § 1.15)
$(-A)^{1/3}x \in \mathcal{D}((-A^{2/3}) \subseteq (X, \mathcal{D}(-A))_{\frac{2}{3},\infty} \subseteq (X, \mathcal{D}(A))_{\frac{1}{3},1} \subseteq \mathcal{D}(A^{1/3})$

cosicché per $-\frac{1}{3} < \mathrm{Re}z < \frac{1}{3}$, $A^z(-A)^{-z}x =$

$= A^{z-\frac{1}{3}}(-A)^{-z-\frac{1}{3}} \quad A^{1/3}(-A)^{1/3}x$ e quindi $z \to A^z(-A)^{-z}x$ è olomorfa su $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[+ iR$, al pari del membro destro della formula (che è olomorfo su C).

(b) Se la formula vale per $0 \leq \mathrm{Re}z < 1$, vale $\forall z \in C$ con Re$z \geq 0$. Infatti
$A^{z+m}(-A)^{-z-n}x = A^n(-A)^{-n} A^z(-A)^{-z}x =$
$(-1)^n(e^{i\pi z}\tilde{P}_+ x + e^{-i\pi z}\tilde{P}_{-x}) = e^{i\pi(z+n)}\tilde{P}_+ x + e^{-i\pi(z+n)}\tilde{P}_- x$

(c) Sia dunque $0<\mathrm{Re}z<1$, $x \in \mathcal{D}(A)$. Qualche calcolo paziente fornisce

$$A^z(-A)^{-z}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} \int_{R\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} s^{-1}(s-A)^{-1}Ax\, ds -$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)^2\Gamma(1-z)^2}\int_1^\infty \int_0^1 \left(\frac{s^{-z}t^{z+1}}{s+t}(\varepsilon t+A)^{-1}Ax + \frac{t^{-z}s^{z-1}}{s+t}(\varepsilon t-A)^{-1}Ax\right)ds\, dt]$$

Peraltro $2\pi i\tilde{P}_+ x$ si ottiene integrando la funzione olomorfa $\lambda \to \frac{1}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}Ax$ invece che sulla retta $\{\lambda \in C; \mathrm{Im}\lambda = s\}$, sulla curva formata dalle semirette $]-\infty, -\varepsilon[$ collegate dalla semicirconferenza di diametro $[-\varepsilon,\varepsilon]$ percorsa in senso orario; per

ciò $P_+x = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{R\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} s^{-1}(s-A)^{-1}Ax\, ds - i\int_0^\pi (\varepsilon\, e^{i\theta}-A)^{-1}Ax\, d\theta\right).$

Quindi, anche con l'aiuto del teorema della convergenza dominata,

$A^z(-A)^{-z}x = 2i\sin(\pi z)\tilde{P}_+x - (i\sin(\pi z)-c(z))x$, dove

$$c(z) = \Gamma(z)^{-2}\Gamma(1-z)^{-z}\int_1^\infty\int_0^1 \left(\frac{s^{-z}t^{z-1}-t^{-z}s^{z-1}}{s+t}\right) ds\, dt$$

può essere calcolato con una piccola astuzia (ponendo $Ax = ax$, dove $a\in C$, $Ima > 0$), e fornisce $c(z) = i\sin(\pi z) - e^{i\pi z}$. Da qui segue la formula

Siamo ora in grado di presentare il risultato principale.

<u>Teorema 3.3.</u> *Sotto l'ipotesi* (2.1) *le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(a) $\tilde{P}_+$ *e* $\tilde{P}_-$ *hanno estensioni continue da* X *a* X

(b) *esiste una coppia* (X_+,X_-) *di sottospazi che separa lo spettro di* A

(c) $\forall z\in C$ *con* $Rez > 0$, $\mathcal{D}(A^z) = \mathcal{D}((-A)^z)$

(d) $\exists z\in C$ *tale che* $Rez > 0$, $z\notin N$ *e* $\mathcal{D}((-A)^z)\subseteq\mathcal{D}(A^z)$

<u>Dimostrazione</u>. (c) $\Rightarrow$ (d) è ovvia. (d) $\Rightarrow$ (a) è conseguenza immediata del lemma 3.2. (a) $\Rightarrow$ (b) non è altro che per il teorema 2.8.

Per provare (b) $\Rightarrow$ (c) basta far vedere che $\mathcal{D}(A^z) = \mathcal{D}((A_+)^z)\oplus\mathcal{D}((A_-)^z)$, $\mathcal{D}((-A)^z) = \mathcal{D}((-A_+)^z)\oplus\mathcal{D}((-A_-)^z)$

e applicare ad A_+ e ad A_- (che hanno lo spettro solo da una parte rispetto a R) quanto visto sopra per il caso in cui $\sigma_+ = \emptyset$ oppure $\sigma_- = \emptyset$. Questo si prova senza difficoltà.

Facendo riferimento al fatto che la formula del lemma 3.2 vale anche per $Rez = 0$ si ottiene poi

Corollario 3.4. Gli enunciati equivalenti del teorema 3.3 sono anche equivalenti ai seguenti:

(a) $\forall s \in R$ $A^{is}(-A)^{-is}$ e $(-A)^{-is}A^{is}$ hanno estensione limitata da X a X

(b) $\exists s \in R\setminus\{0\}$ tale che $A^{is}(-A)^{-is}$ ha estensione limitata da X a X.

Supponiamo che valgano le condizioni equivalenti del teorema 3.3 e siano P_+ e P_- le estensioni continue di $\tilde{P}_+$ e $\tilde{P}_-$. Allora dal lemma 3.2 segue che per Rez > 0 $A^z(-A)^{-z} = e^{i\pi z}P_+ + e^{-i\pi z}P_-$. Poiché scambiare A con -A ha l'effetto di scambiare $\tilde{P}_+$ con $\tilde{P}_-$, e quindi P_+ con P_- si ha anche che per Rez<0 $e^{i\pi z}P_+ + e^{-i\pi z}P_- = (-A)^{-z}A^z$. Del resto, $\forall z \in C$ $e^{i\pi z}P_+ + e^{-i\pi z}P_- = I + (e^{i\pi z}-1)P_+ + (e^{-i\pi z}-1)P_- + (e^{i\pi z}-1)(e^{-i\pi z}-1)P_+P_-$ (perchè $P_+P_- = P_-P_+ = 0$) $=$

$$= (I+(e^{i\pi z}-1)P_+)(I+(e^{-i\pi z}-1)P_-) = (I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\pi z)^k}{k!} P_+^k) \cdot$$

$$\cdot (I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i\pi z)^k}{K!} P_-^k) = \exp(i\pi z\, P_+)\exp(-i\pi z P_-) = \exp(i\pi z(P_+-P_-)).$$

Ora in [N] si è definito il logaritmo di un operatore che abbia certe proprietà, che sia A che -A possiedono. Nel nostro caso log(A) è semplicemente il generatore infinitesimale del C_0-semigruppo $t \to A^{-t}$, $t \geq 0$. In particolare $\mathscr{D}(A^t) \subset \mathscr{D}(\log(A))$ $\forall t \in R^+$. Le considerazioni precedenti suggeriscono che:

Lemma 3.4. $\forall x \in \mathscr{D}(A)$ $\log(A)x - \log(-A)x = i\pi(\tilde{P}_+x - \tilde{P}_-x)$

e da qui segue che

Teorema 3.5. *Le condizioni equivalenti del teor. 3.3 valgono se e solo se* $\log(A)-\log(-A)$ *ha prolungamento continuo da* X *a* X.

4. UN ESEMPIO

Nello spazio di Banach $(L^p(0,\omega))^2$ (dove $0<\omega<+\infty$, $1\leq p<+\infty$) consideriamo l'operatore lineare A tale che $\mathcal{D}(A) = \{(f,g)\in(W^{1,p}(0,\omega))^2,\ f(0) = f(\omega) = 0\}$ e $A(f,g) = (-ig', if')\ \forall(f,g)\in\mathcal{D}(A)$.

Calcoli elementari provano che:

(4.1) $\sigma(A) = \{\frac{i\pi k}{\omega}\ ;\ k\in Z\}$

(4.2) $\forall k\in Z$ $\frac{i\pi k}{\omega}$ è un polo semplice del risolvente

(4.3) l'operatore risolvente di A si scrive nella forma

$$((\lambda-A)^{-1}u)(t) = \int_0^\omega K(t,s;\lambda)\begin{pmatrix}u_1(s)\\ u_2(s)\end{pmatrix}ds$$

dove $K(t,s;\lambda)$ è una matrice 2x2 e $K(s,t;\lambda) = {}^tK(t,s;\lambda)$

(4.4) posto $P_k = \mathrm{Res}(\lambda-A)^{-1}\big|_{\lambda=\frac{i\pi k}{\omega}}$, si ha

$$(P_ku)(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega(\sin(\tfrac{k\pi}{\omega}s)u_1(s)+\cos(\tfrac{k\pi}{\omega}s)u_2(s))ds(\sin(\tfrac{k\pi}{\omega}t),\ \cos(\tfrac{k\pi}{\omega}t));$$

in particolare $(P_0u)(t) = (0, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega u_2(s)ds)$ e $\ker P_0 = \{(f,g)\in(L^p(0,\omega))^2;$ $\int_0^\omega g = 0\}$.

Inoltre valgono le seguenti stime (per ogni fissato $p\in[1,\infty[$)

(4.5) $\|(\lambda-A)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{|\mathrm{Re}\lambda|}$ per $|\mathrm{Re}\lambda| \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

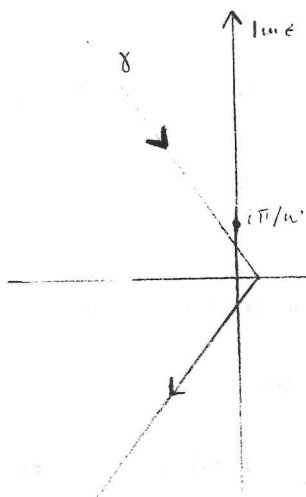
(4.6) $\forall\varepsilon\in R^+\ \forall\ \in]0,1[\ \exists C_{\varepsilon,\theta} > 0$ tale che $\forall k\in Z\ \forall s\in[-\varepsilon,\varepsilon]$

$$\|(s+i(k+\theta)\tfrac{\pi}{\omega} - A)^{-1}\| \leq C_{\varepsilon,\theta}.$$

Le stime (4.5) e (4.6) si provano con un calcolo diretto se p=1; quando p=2 seguono immediatamente dal fatto che iA è autoaggiunto in $(L^2(0,\omega))^2$ (cosicchè $\|(\lambda-A)^{-1}\| = (\mathrm{dist}(\lambda,\sigma(A))^{-1}$; per interpolazione si ottengono allora $\forall p\in[1,2]$ e (tenuto conto del fatto che $K(s,t;\lambda) = {}^tK(s,t;\lambda)$) si ottengono per dualità quando $p > 2$.

Così come è definito, l'operatore A non soddisfa l'ipotesi (2.1) perchè $0\in\sigma(A)$. Tuttavia possiamo separare i due chiusi $\{0\}$ e $\sigma(A)\setminus\{0\}$, il primo dei quali è compatto, scrivendo semplicemente $(L^p(0,\omega))^2 = \ker A \oplus \ker P_0$. Se denotiamo con A_0 la restrizione di A al sottospazio invariante $\ker P_0$, otteniamo che, in $\ker P_0$, A_0 gode di tutte le proprietà spettrali dell'operatore A, e in più $0\in\rho(A_0)$.

Poichè ker A ha dimensione 1 e $\mathscr{D}(A)$ è denso in $(L^p(0,\omega))^2$ (perchè contiene $(C_0^\infty)^2$), si ha subito che $\mathscr{D}(A_0)$ è denso in $\ker P_0$. La stima (4.5) assicura allora che l'ipotesi (2.1) è soddisfatta da A_0.

Ora, sia γ la curva disegnata nella figura seguente:

E' noto che $A_0^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^{-z}(\lambda - A_0)^{-1} d\lambda$, $\mathrm{Re}\, z > 0$. Se si tronca γ e si chiude il circuito in modo da racchiudere i poli $\frac{i\pi k}{\omega}$ con $0<|k|\leq n$, per $n\to+\infty$, con l'aiuto delle stime (4.5) e (4.6) e del teorema dei residui si ottiene, per $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$(4.7) \qquad A_0^{-z} = \sum_{k=1}^{\infty} [(\frac{i\pi k}{\omega})^{-z} P_k + (\frac{-i\pi k}{\omega})^{-z} P_{-k}]$$

(la convergenza della serie essendo intesa nella norma di $(L^p(0,\omega))^2$).

A questo punto, con l'aiuto di alcuni classici risultati di analisi armonica (v. [DV] per i dettagli), si prova che:

Teorema 4.8. *Per ogni fissato* $p \in]1,\infty[$ *e per* $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$\|A_0^{-z}\| \leq C(1+|z|)\exp(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\, z|)$$

conseguentemente $\forall s \in R$ A_0^{is} *è un operatore limitato e*

$$\|A_0^{is}\| \leq C(1+|s|)\exp(\frac{\pi}{2}|s|)$$

Teorema 4.9. *Se* $p = 1$, *allora* $\log(A_0) - \log(-A_0)$ *non ha prolungamento continuo a* $\ker P_0$.

Dal Teorema 4.8 e dal corollario 3.4 segue che:

Corollario 4.10. *Se* $1<p<\infty$, *allora è possibile separare*

$\sigma(A_0)\cap\{z\in C;\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ *da* $\sigma(A_0)\cap\{z\in C;\ \mathrm{Im}\, z<0\}$

Invece dal teorema 4.9 e dal teorema 3.5 segue che

Corollario 4.11. *Se* $p = 1$, *allora non è possibile separare* $\sigma(A_0)\cap\{z\in C;\ \mathrm{Im}z > 0\}$ *da* $\sigma(A_0)\cap\{z\in C;\ \mathrm{Im}z < 0\}$.

BIBLIOGRAFIA

[DV] G. DORE, A. VENNI, Separation of two (possibly unbounded) components of the spectrum of a linear operator. Preprint.

[G] P. GRISVARD, An approach to the singular solutions of elliptic problems via the theory of differential equations in Banach spaces. Differential Equations in Banach Spaces; Proceedings, Bologna 1985 (ed. by A. Favini and E. Obrecht); Lecture Notes in Mathematics 1223, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1986.

[K] T. KATO, Perturbation theory of linear operators, 2nd ed. Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.

[T] H. TRIEBEL, Interpolation theory, functions spaces, differential operators; North Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.

[N] V. NOLLAU, Über den logarithmus abgeschlossener Operatoren in Banachschen Räumen. Acta Sci. Math. (Szeged) 30 (1969), 161-174.